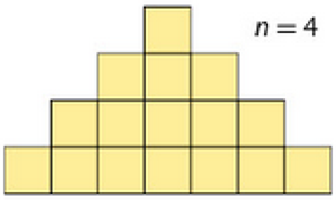
TD : raisonnement par récurrence

36 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
Pour tout entier naturel n, on note $\mathrm{P}(n)$ la propriété : « $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ ».
a) Vérifier que $\mathrm{P}(0)$ est vraie.
b) On suppose la propriété vraie pour un nombre entier naturel k.
Démontrer qu'alors la propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie.
c) Que peut-on conclure des questions précédentes ?

37 Pour tout entier naturel n, on note $\mathrm{P}(n)$ la propriété : « $4^n + 1$ est un multiple de 3 ».
a) On suppose la propriété vraie pour un nombre entier naturel k.
Démontrer que la propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie.
b) La propriété $\mathrm{P}(0)$ est-elle vraie ?
c) Peut-on affirmer : « Pour tout entier naturel n, $4^n + 1$ est un multiple de 3 » ?

38 (u_n) est la suite définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 6n$.
k désigne un nombre entier naturel.
a) Démontrer que si u_k est pair, alors u_{k+1} est pair.
b) Démontrer que si u_k est multiple de 3, alors u_{k+1} est multiple de 3.
c) À quelle condition les termes de la suite (u_n)
• sont-ils pairs ? • sont-ils des multiples de 3 ?

87 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n est le nombre de carrés nécessaires à la construction d'une pyramide comme ci-contre à n étages. Ainsi, $u_1 = 1$.



1. a) Déterminer u_2, puis u_3.
b) Justifier que les nombres de carrés à la base de la pyramide sont les termes d'une suite arithmétique.
c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1.$$
d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = n^2$.
2. Retrouver ce résultat à l'aide de la somme des termes d'une suite arithmétique.

39 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 120$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}14\, u_n - 7$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$u_n = 70 \times 1{,}14^n + 50.$$

40 (v_n) est la suite définie par $v_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$v_n = n^2 + n - 1.$$

Pour les exercices 41 à 45, démontrer la proposition par récurrence.

41 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

42 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

43 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

44 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1).$$

45 Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

46 a) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $4n > 2(n+1)$.
b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $2^n > 2n$.

47 (w_n) est la suite définie par $w_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \sqrt{7 w_n}$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant 7$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (w_n).

Pour les exercices 49 à 51, démontrer la propriété par récurrence

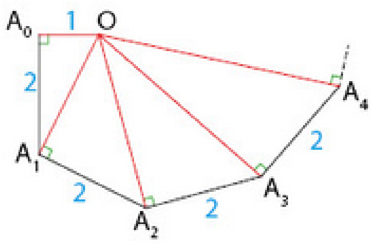
49 Pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

50 Pour tout entier naturel n, $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.

51 Pour tout entier naturel n, $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

52 (v_n) est la suite définie par $v_0 = 0{,}25$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 5v_n - 1$.
Démontrer par récurrence que la suite (v_n) est constante.

53 Sur cette figure :
- $OA_0 = 1$;
- $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = 2$;
- les triangles OA_0A_1, $OA_1A_2, \ldots$ sont rectangles.



Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $OA_n = \sqrt{4n+1}$.

54 À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées dans une société de location. On modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n), où pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. On admet que cette modélisation conduit à l'égalité $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 42$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = -140 \times 0{,}9^n + 420$.

b) Déterminer le mois à partir duquel le nombre de voitures louées dépassera 400.

90 (s_n) est la suite définie par $s_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{4(n+1)^2 - 1}.$$

On se propose de déterminer une expression explicite de s_n en fonction de n.

a) Déterminer s_1, s_2, s_3, s_4 sous forme de fractions irréductibles.

b) Émettre une conjecture pour une expression de s_n en fonction de n.
Vérifier si cette expression est cohérente avec les valeurs obtenues au **a)**.
Tester cette expression en déterminant s_5.

c) Démontrer cette conjecture par récurrence.

88 Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, d_n est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n sommets.

1. a) Pour chaque polygone convexe ci-dessus, déterminer son nombre de diagonales, puis compléter ce tableau.

n	3	4	5	6
d_n	0			

b) Dans un repère, quelle est l'allure du nuage de points représentant la suite (d_n) ?

c) On admet alors qu'il existe deux réels a et b tels que $d_n = an^2 + bn$. Déterminer a et b.

2. a) Combien de nouvelles diagonales sont créées lors de l'ajout d'un sommet au polygone convexe ?

b) En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, l'expression de d_{n+1} en fonction de d_n.

c) Retrouver alors le résultat obtenu à la question **1. c)** par récurrence.

89 Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, s_n est la somme des mesures des angles, en degré, d'un polygone convexe à n sommets.

a) En reprenant les figures de l'exercice précédent, compléter un tel tableau.

n	3	4	5	6
s_n	180			

b) Émettre une conjecture sur l'expression de s_n en fonction de n.

c) Démontrer cette conjecture par récurrence.

91 **a)** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

b) Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, simplifier la différence $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Retrouver alors le résultat précédent.

94 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n(n^2+5)}{6}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

95 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$.

a) Calculer u_2 et u_3.

b) Démontrer par récurrence double (voir exercice **76**) que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

96 (F_n) est la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

a) Calculer F_2 et F_3.

b) Démontrer par récurrence double que pour tout entier naturel n, $F_n \leqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}.$$

111 **Étudier deux suites imbriquées** Algo — 30 min

D'après Bac, Asie 2012

1. On considère l'algorithme ci-contre.

Les variables a, b et N ont des valeurs données. Au début, on affecte la valeur 0 à la variable n.

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	u	v	a	b
0			4	9
1				
2				

```
Tant que n < N :
    n ← n + 1
    u ← (a + b)/2
    v ← √((a² + b²)/2)
    a ← u
    b ← v
Fin Tant que
```

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}.$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n > 0 \text{ et } v_n > 0.$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2.$$

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.

110 **Étudier une suite définie par récurrence** Algo 30 min

D'après Bac, Polynésie 2012

Partie A

On considère l'algorithme ci-contre.

Au début, on affecte la valeur 0 à la variable U et on donne une valeur à N. En fin d'exécution, l'algorithme renvoie la valeur de U.

Que renvoie l'algorithme pour N = 3 ?

```
Pour k allant de 0 à N − 1
  | U ← 3U − 2k + 3
Fin Pour
```

Partie B

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

4. p est un nombre entier naturel non nul.

On suppose qu'il existe au moins un entier n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$,

$$u_n \geqslant 10^p.$$

a) Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.

b) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

c) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée, renvoie la valeur du plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Les bonus :

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x > -1$, on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

1. La récurrence porte-t-elle sur n? Sur x? Sur les deux?
2. Énoncer l'hypothèse de récurrence.
3. Vérifier que $(1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$.
4. Rédiger la démonstration.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on peut trouver n entiers strictement positifs $x_1, \dots, x_n$, deux à deux distincts, tels que

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

1. Démontrer qu'on peut partager un carré en 4 carrés, puis en 6 carrés, en 7 carrés, en 8 carrés.
2. Démontrer que si on peut partager un carré en n carrés, alors on peut le partager en $n+3$ carrés.
3. Démontrer qu'on ne peut pas partager un carré en 2 carrés, en 3 carrés, en 5 carrés.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de n peut-on partager un carré en n carrés?